MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

(Option agronomie – Option biochimie-biologie)

I. 1. On définit la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$v \longmapsto \frac{e^v - 1}{v}.$$

a. Montrer que l'on peut prolonger g en une fonction développable en série entière. Déterminer le développement en série de g et préciser le rayon de convergence.

Étudier g au voisinage de 0 et préciser la position de la courbe représentative de g par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

b. Calculer g' et montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Étudier les branches infinies de la courbe représentative de g et tracer cette courbe dans un repère orthonormé.

(Dans cette question, ainsi que dans les questions 2 et 3 qui suivent, l'étude de la concavité n'est pas demandée.)

2. On définit la fonction $h :]-1,0[\cup]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \frac{\ln(1+u)}{u}.$$

Montrer que l'on peut prolonger h par continuité en 0. Déduire du 1.*b.*, à l'aide d'un changement de variable, que h est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.

3. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}.$$

Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

4. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$.

a. Justifier l'existence de I.

b. Calculer I.

5. Pour quelles valeurs du réel p, l'intégrale $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^p}\,dx$ existe-t-elle ?

II. On désigne par n un entier naturel et on considère l'intégrale $H_n(x) = \int_0^x u^n \times \ln(1+u^2)\,du$ où $x \in \mathbb{R}$.

1. *a.* Calculer $H_1(x)$.

b. Montrer que le calcul de $H_n(x)$ se ramène à celui d'une primitive d'une fraction rationnelle.

c. Calculer $H_0(x)$ et $H_2(x)$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = H_n(1)$.

a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et, par un encadrement très simple, qu'elle tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{u^{n+2}}{1+u^2}\,du$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent aussi simple que possible de u_n.